7 класс

1. (2 балла) Расставьте знаки арифметических действий и скобки там, где считаете нужным, чтобы получилось верное равенство:

   2 4 6= 3 3 3
2. (2 балла) Найти сумму всех трёхзначных чисел, произведение цифр которых равно 3.

3. (2 балла) На клетчатой бумаге изображена чашка с крышкой (см. рис. 1). На покраску крышки израсходовали 30 г краски. Сколько ещё нужно грамм краски для покраски чашки? Не забудьте обосновать ответ.

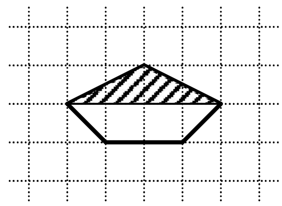
   

   Рис. 1

4. (3 балла) На почтовом ящике написано: «Выемка писем производится пять раз в день с 7 до 19 часов». И, действительно, первый раз почтальон забирает почту в 7 утра, а последний – в 7 вечера. Через какие равные интервалы времени вынимаются письма из ящика?

5. (3 балла) В забеге участвовал 41 спортсмен. Число спортсменов, прибежавших раньше Васи, в 4 раза меньше числа тех, кто прибежал позже него. Какое место занял Вася?

6. (3 балла) В записи ***** × *** = ******1 замените звёздочки нулями и единицами так, чтобы получилось верное равенство.
7. (4 балла) Из урожая фруктов сварили варенье. Варенье расставили на 2 полки так, что на каждой полке стоит одно и то же количество литров варенья. При этом на первой полке стоит одна большая и 6 маленьких банок, на **второй** – 2 большие и 4 маленьких. Сколько литров варенья было сварено, если известно, что вместимость маленькой банки составляет 1 литр? Ответ нужно объяснить.
8. (4 балла) Доктор Айболит раздал четырем заболевшим зверям 2006 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот – на одну больше, чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придется съесть слону?

9. (4 балла) В озере водятся караси, окуни и щуки. Два рыбака поймали вместе 70 рыб, причем $5/9$ улова первого рыбака – караси, а $7/17$ улова второго – окуни. Сколько щук поймал каждый, если оба поймали поровну карасей и окуней?

Решения 7 класс (**максимальное количество баллов – 27**):

1. может быть несколько. Например, такие: а) $24+6=33-3$; б) $2\cdot 4-6=(3+3):3$; в) 2+4–6=3 – 3:3

2. Найти сумму всех трёхзначных чисел, произведение цифр которых равно 3.
Ответ: 555
Решение: Произведение трех цифр может быть равно 3 только, если это цифры 1,1 и 3. Рассмотрим все возможные трехзначные числа, которые можно из них составить – это 113, 131, 311. Их сумма равна 555.
3. На клетчатой бумаге изображена чашка с крышкой (см. рис. 1). На покраску крышки израсходовали 30 г. краски. Сколько ещё нужно грамм краски для покраски чашки?
Ответ: 45 г
Решение: Площадь закрашенной части составляет ровно 2 клеточки. Тогда на покраску 1 клетки расходуется 15 г краски. Площадь «чашки» составляет 3 клеточки. Тогда на ее покраску потребуется еще 45 г краски.
4. На почтовом ящике написано: «Выемка писем производится пять раз в день с 7 до 19 часов». И, действительно, первый раз почтальон забирает почту в 7 утра, а последний – в 7 вечера. Через какие равные интервалы времени вынимаются письма из ящика?
Ответ: через 3 часа
Решение: Промежуток времени с 7 до 19 ч составляет ровно 12 часов. В течение этого времени почтальон еще трижды вынимает почту из ящика через равные интервалы. Но тогда 12 ч делится на 4 равных промежутка по 3 часа.
5. ***Ответ.*** Девятым. ***Решение***. Число спортсменов, прибежавших раньше Васи, примем за одну часть, тогда число спортсменов, прибежавших позже Васи, составляет 4 части. 40 спортсменов разделим на 5 равных частей, получим, что одна часть составит 8 спортсменов. Значит, Вася прибежал девятым.
6. Например, так: 10001 × 111 = 1110111.

7. ОТВЕТ: 16 литров. РЕШЕНИЕ. Сравним количество варенья на первой и второй полке. Из этого сравнения видно, что одна большая банка содержит столько же варенья, сколько и две маленьких, то есть, 2 литра. Теперь считаем. На 1-й полке 2+6=8 литров, на второй столько же. Всего 16 литров.

8. (2006 – (1+2+3)):4=500 таблеток получил крокодил. Значит, слону придётся съесть 503 таблетки. ***Ответ****:* 503 таблетки.
9. ***Ответ***: Первый – 2, второй – 0.
Первый поймал число рыб кратное 9, а второй кратное 17. Но можно подобрать только два числа, дающих в сумме 70, так, чтобы одно делилось на 9, а второе – на 17. Эти числа: 36 и 34. Значит, первый поймал 36 рыб, а второй – 34. Тогда из условия следует, что оба поймали по 20 карасей и 14 окуней. Значит, первый поймал еще 2 щуки, а второй – 0.

8 класс

1. (2 балла) Расставьте скобки и знаки арифметических действий так, чтобы получилось правильное равенство:
   $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6021} = 2007.$
2. (2 балла) Найти сумму всех трёхзначных чисел, произведение цифр которых равно 6.
3. (2 балла) Как с помощью прямоугольной плитки размером 7см на 9см начертить
   отрезок длиной 1 см?

4. (3 балла) Найдите все решения ребуса:

$$\begin{array}{r} \text{РАЗ} \\ +\quad \text{АЗ} \\ \underline{\text{З}} \\ 444 \end{array}$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры.

5. (3 балла) Работник заключил контракт на месяц на следующих условиях. За каждый отработанный день он получает 100 рублей. Если же он прогуливает, то не только ничего не получает, но подвергается штрафу в размере 25 рублей за каждый день прогула. Через 30 дней выяснилось, что работник ничего не заработал. Сколько дней он действительно работал?
6. (3 балла) Доктор Айболит раздал четырем заболевшим зверям 2006 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот – на одну больше, чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придется съесть слону?

7. (4 балла) Три друга сделали по одному заявлению про целое число x. Петя: «Число x больше 4, но меньше 8». Вася: «Число x больше 6, но меньше 9». Толя: «Число x больше 5, но меньше 8». Найдите число х, если известно, что двое из друзей сказали правду, а третий солгал. Нужно не только проверить, что найденное число годится, но и объяснить, почему другие варианты ответа невозможны.
8. (4балла) В озере водятся караси, окуни и щуки. Два рыбака поймали вместе 70 рыб, причем $5/9$ улова первого рыбака – караси, а $7/17$ улова второго – окуни. Сколько щук поймал каждый, если оба поймали поровну карасей и окуней?
9. (4 балла) Трое мужчин пришли к парикмахеру. Побрив первого, тот сказал: «Посмотри сколько денег в ящике стола, положи столько же и возьми 2 доллара сдачи». Тоже он сказал второму и третьему. Когда они ушли, оказалось, что в ящике денег нет. Сколько было денег в ящике первоначально, если всем удалось совершить задуманное?

Решения 8 класс (максимальное количество баллов – 27):

1. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right):\frac{1}{6021}=2007.$

2. Найдём все трёхзначные числа, произведение цифр которых равно 6. $6=6\cdot1\cdot1=3\cdot2\cdot1$. Итак, таких чисел будет девять: 611, 161, 116, 321, 312, 231, 213, 132, 123. Их сумма равна 2220. ***Ответ***: 2220.

3. Как с помощью прямоугольной плитки размером 7см на 9см начертить отрезок длиной 1 см?

Решение: Четыре раза отложим от точки A на прямой отрезок, равный 7 см, получим отрезок AB длины 28 см. Теперь на этом же отрезке от его начала A трижды отложим отрезок, равный 9 см. Получим отрезок AC длины 27 см. Тогда отрезок BC искомый.

4. Так как сумма трех цифр «З» дает на конце четверку, то «З» может быть только 8. Цифра «Р» может принимать только два значения: 3 и 4. Для каждого случая однозначно находим «А».

Ответ: 368+68+8=444, 418+18+8=444.

5. Так сумма штрафа за прогул рабочего дня в четыре раза меньше заработка в день, то мы получим в итоге ноль, если на каждый день, в течение которого работник трудился, будет приходиться четыре прогула. Пусть он работал x дней, тогда прогуливал $4x$. Тогда $5x=30$, т.е. $x=6$.

Ответ: 6 дней.

6. (2006 – (1+2+3)):4=500 таблеток получил крокодил. Значит, слону придётся съесть 503 таблетки. ***Ответ:*** 503 таблетки.

7. ОТВЕТ: 6. РЕШЕНИЕ. Ясно, что число x должно быть больше 4, но меньше 9, иначе все солгали. Поэтому для числа x есть всего четыре возможности: 5, 6, 7, 8. Если x=5, то правду сказал только Петя. Если x=8, то правду сказал только Вася. Если x=7, то правду сказали все трое. И только при x=6 правду скажут двое: Петя и Толя.

8. Ответ: Первый – 2, второй – 0.

Первый поймал число рыб кратное 9, а второй кратное 17. Но можно подобрать только два числа, дающих в сумме 70, так, чтобы одно делилось на 9, а второе – на 17. Эти числа: 36 и 34. Значит, первый поймал 36 рыб, а второй – 34. Тогда из условия следует, что оба поймали по 20 карасей и 14 окуней. Значит, первый поймал еще 2 щуки, а второй – 0.

9. Ответ: 175 центов.

После того, как третий положил свои деньги, в столе оказалось 2 доллара. Это означает, что перед тем, как он это сделал, в столе был 1 доллар. Значит, после того, как второй положил деньги, в столе было 3 доллара, а перед тем, как он это сделал, в столе было 1,5 доллара. Рассуждая аналогично для первого, получаем, что перед приходом первого в столе был (1,5+2):2=1,75 долларов.

Завдання інтернет-олімпіади
з математики 2011-2012 н.р.

9 клас

Задача 1

Побудувати графік функції:

$$y = \frac{x^2\sqrt{x} - x^2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1 - 9x^2}{3x - 1} - \frac{100 - 60x + 9x^2}{3x - 10}.$$

Задача 2

Довести нерівність

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ac} + \frac{c^4}{ba} \geq a^2 + b^2 + c^2, \text{ де } a > 0,\ b > 0, c > 0.$$

Задача 3

Розв'язати в натуральних числах рівняння:

$$x^2 - y^2 = 2y + 13.$$

Задача 4

В трикутнику ABC з кутом $\angle ABC = 60°$ бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці M. На стороні AC взято точку K так, що $\angle AMK = 30°$. Знайти $\angle OKC$, де O – центр кола, описаного навколо трикутника AMC.

Задача 5

Точки площини пофарбовано в чорний або білий колір. Довести, що на цій площині знайдеться трикутник з кутами 30°, 60° і гіпотенузою 2, вершини якого однокольорові.

Завдання інтернет-олімпіади
з математики 2011-2012 н.р.

10 клас

Задача 1

Відстань між містами А і В пасажирський поїзд проходить на 4 год швидше товарного. Якби кожний поїзд рухався той час, який витрачає інший поїзд на шлях з А в В, то пасажирський поїзд пройшов би на 280 км більше, ніж товарний. Якби швидкість кожного поїзда збільшити на 10 км/год, то пасажирський поїзд пройшов би відстань між містами на 2 год 24 хв швидше товарного. Знайдіть відстань між містами А і В.

Задача 2

Розв′язати нерівність $\sqrt{1-x^2} < a - x$, де a – дійсний параметр.

Задача 3

Точка P розміщена всередині квадрата $ABCD$, так що $AP:BP:CP = 1:2:3$. Знайдіть кут $\angle APB$.

Задача 4

На острові Кольоровому живуть 13 червоних, 15 жовтих і 17 зелених хамелеонів. Якщо зустрічаються два хамелеони різного кольору, то вони одночасно міняють свій колір на третій (червоний і жовтий стають обидва зелені і т.д.). Чи може статись так, що через деякий час всі хамелеони будуть одного кольору? Відповідь поясніть.

Задача 5

Будемо вважати шестицифровий номер тролейбусного квитка «щасливим», якщо сума цифр, що стоять на парних місцях дорівнює сумі цифр, що стоять на непарних місцях. Наприклад, квиток з номером 745635 вважається «щасливим», бо 7+5+3=4+6+5=15. Обчисліть кількість «щасливих» номерів від 000000 до 999999.

Завдання інтернет-олімпіади з математики 2011-2012 н.р.

11 клас

Задача 1

Знайти всі трійки дійсних чисел $(x; y; z)$, що задовольняють рівняння

$$x^2+1-2x\sin(\pi y)+\sqrt{yz-2z^2-64}=(41-yz)(\cos(2\pi y)+\cos(2\pi z))^2.$$

Задача 2

У тетраедрі $ABCD$: $AB=AC=AD=2$, $BC=BD=CD=1$. Яку найбільшу площу може мати ортогональна проекція даного тетраедра на площину?

Задача 3

Знайти прямокутник, сторони якого виражені цілими числами, а площа дорівнює сумі основи, висоти і діагоналі, помноженій на 4.

Задача 4

При яких значеннях x та y вираз

$$\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}-\sqrt{x^2+y^2-8x-10y+41}$$

набуває найбільшого значення? Знайти це значення.

Задача 5

Зобразити на координатній площині Oxy фігуру, яка задається рівнянням $|2x-3y+7|+|2x+y-12|+4|y-2|=11$.

Знайти площу цієї фігури. Скільки розв’язків в залежності від параметра a має система рівнянь:

$$\begin{cases}|2x-3y+7|+|2x+y-12|+4|y-2|=11,\\ x^2+y^2-8x+2y+17=a^2\end{cases}?$$

63 олімпіада юних математиків

2012-2013 навч. рік

10 клас

1. Числа $5x-y,\ 2x+3y\ \ i\ \ x+2y$ утворюють арифметичну прогресію, а числа $(y+1)^2,\ xy+1\ \ i\ \ (x-1)^2$ утворюють геометричну прогресію. Знайти *x* та *y*.
2. Побудувати на координатній площині фігуру, задану системою нерівностей $\begin{cases}|y|-|x|\le 1\,,\\ |y|\ge x^2+1.\end{cases}$
3. Знайти натуральні числа n, при яких дріб $\dfrac{2n+3}{3n+2}$ є скоротним.
4. Нехай $(x_1;y_1),(x_2;y_2),\dots(x_n;y_n)$ - розв'язки системи рівнянь $\begin{cases}2y-3=\sqrt{25x^2-70x+49},\\ \qquad y-x=1.\end{cases}$ Знайти добуток $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n$.
5. Знайти дійсні значення параметра a, при яких нерівність $x^2-|a-1|x+a+1>0$ справедлива для всіх тих значень х, які задовольняють нерівність $|x|<1$.

63 олімпіада юних математиків

2012-2013 навч. рік

11 клас

1. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{3x+4\sqrt{5}}\le\sqrt{5}+2$.
2. Обчислити $ctg\alpha\cdot ctg(\alpha+\beta)$, якщо $\cos\beta=17\cos(2\alpha+\beta)$.
3. Основою піраміди є прямокутник $ABCD$, причому $AB=a,\ \ BC=b.$ Бічне ребро SD перпендикулярне до площини основи і має довжину c. Знайти відстань між прямими $AD\ \ i\ \ SB$.
4. У прямокутному трикутнику бісектриса одного з гострих кутів дорівнює $\dfrac{c\sqrt{3}}{3}$, де $c-$гіпотенуза. Знайти катети цього трикутника.
5. Побудувати графік функції $y=\dfrac{1}{2}\left(\left|1+\sqrt{4-x^2}\right|+\left|1-\sqrt{4-x^2}\right|\right)$.

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

10 клас

1. **З пункту А в пункт В та з В в А одночасно вийшли два пішоходи. Коли перший пройшов половину шляху, другому залишилось пройти 24км, а коли другий пройшов половину шляху, першому залишилось пройти 15км. Скільки кілометрів залишиться пройти другому пішоходу після того, як перший закінчить перехід?**
2. **Розв'язати рівняння:** $\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{8-x^2}=3.$
3. **Три висоти трикутника перетинаються в точці О, яка поділяє одну з них навпіл, другу у відношенні 2:1, рахуючи від вершини. В якому відношенні точка О поділяє третю висоту?**
4. **Побудувати графік функції:** $|y|=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}.$
5. **Скільки розв'язків в залежності від параметра** a **має система:**
$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

2011-2012 навч. рік

11 клас

1. **Дано опуклий чотирикутник** ***ABCD*** **такий, що** $\angle ABC=90^\circ$, $AC=CD$ **і** $\angle BCA=\angle ACD.$ **Точка** F **- середина відрізка** $AD.$ **Відрізки** BF **і** AC **перетинаються в точці** L **. Довести, що** $BC=CL.$**.**
2. **Довести нерівність:** $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+...+\dfrac{1}{n!}\le\dfrac{2n-1}{n}.$ **(**$n!=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n$**)**
3. **Побудувати графік функції:** $y=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+ctg^2 x}\cdot\sqrt{4x^2+4x+1}.$
4. **Розв'язати рівняння:** $x^2-\sin^2 y=2x\cos y-1-y^2.$
5. **В сосуді знаходиться 10%-й розчин спирту. З сосуду відлили** $\dfrac{1}{3}$ **його вмісту, а в частину, що залишилась, долили води так, що сосуд став заповненим на** $\dfrac{5}{6}$ **від початкового об'єму. Який процентний вміст спирту в сосуді?**

Умови завдань другого (районного, міського) туру
Всеукраїнської олімпіади юних математиків
2010-2011 навчального року

6 клас

1. Розмовляють троє друзів на прізвища: Білокуров, Чорний та Рудий. Брюнет сказав Білокурову: «Цікаво, що один з нас блондин, другий – брюнет, а третій – рудий, але ні в одного колір волосся не відповідає прізвищу». Який колір волосся мають кожен з друзів? Відповідь поясніть.

2. На дошці записані числа 0, 1, 0, 0. За один крок дозволяється додавати одиницю до будь-яких двох з них. Чи можна, повторюючи цю операцію багато разів, досягти того, щоб усі числа стали рівними?

3. В тирі Петрик купив 5 куль. За кожний успішний постріл йому давали ще 5 куль. Петрик стверджує, що зробив 50 пострілів і 8 разів влучив у ціль, а його друг Василь каже, що такого бути не може. Хто з них правий і чому?

4. У правій і лівій кишенях Олега разом 35 коп. Якщо з правої кишені він перекладе в ліву стільки копійок, скільки було в лівій, то в правій кишені залишиться на 3 коп. більше, ніж в лівій. Скільки грошей було в Олега в кожній кишені спочатку?

5. Я задумав число, якщо до його половини додати чверть його, то вийде 18. Яке число я задумав?

Умови завдань другого (районного, міського) туру
Всеукраїнської олімпіади юних математиків
2010-2011 навчального року

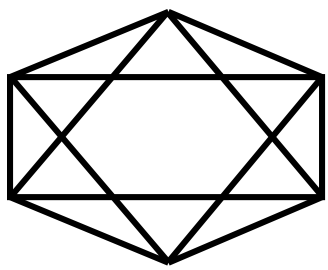
7 клас

1. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ ділиться націло на 10.

2. Олег задумав натуральне число, помножив його на 13, викреслив останню цифру результату, одержане число помножив на 7, знову викреслив останню цифру результату і одержав число 21. Яке число задумав Олег?

3. Розв'язати рівняння $|x|=\frac{x}{2}+2010$.

4. Скільки трикутників зображено на малюнку?



5. Є 242 монети, серед яких одна фальшива і легша за інші, а усі інші – справжні. За скільки зважувань на терезах без важків з двома чашами можна визначити фальшиву монету?

Умови завдань другого (районного, міського) туру
Всеукраїнської олімпіади юних математиків
2010-2011 навчального року

8 клас

1. Відомо, що ціле число n не кратне 3. Доведіть, що n^2+8 кратне 3.

2. Два брати, Олег і Тарас, хочуть провідати бабусю, що живе за 20 км. У них є велосипед, на якому може пересуватись лише один з братів. Олег ходить пішки зі швидкістю 5 км/год, а швидкість їзди на велосипеді 20 км/год, швидкість Тараса 4 км/год і 15 км/год відповідно. Велосипед можна залишити на дорозі без догляду. За який найменший час хлопці зможуть дістатися до бабусі?

3. Одна з основ рівнобічної трапеції вдвічі більша за іншу, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.

4. Доведіть тотожність $\dfrac{(a+b)}{a+(a-b)}=\dfrac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}$.

5. З довільної точки M катета AC прямокутного трикутника ABC опущено перпендикуляр MK на гіпотенузу AB. Доведіть, що $\angle MKC=\angle MBC$.

Умови завдань другого (районного, міського) туру Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2010-2011 навчального року

9 клас

1. Знайти найбільше двоцифрове число, яке можна записати у вигляді суми десяти послідовних натуральних чисел.

2. Знайти всі значення k, для яких рівняння $x^2 - kx + 80 = 0$ має два різні додатні парні цілі розв'язки.

3. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} (2+x)(y+2)\cdot xy = 9, \\ x + y - xy = 1. \end{cases}$$

4. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких $(x;\, y)$ задовольняють нерівність $(|x|-1)^2 \le (y+2)^2$.

5. У трикутнику ABC провели медіану BM і бісектрису BL (точки M і L не збігаються). На прямій BM позначили точку E таку, що $LE \parallel BC$. З точки E опустили перпендикуляр ED на пряму BL. Доведіть, що $MD \parallel AB$.

Умови завдань другого (районного, міського) туру Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2010-2011 навчального року

10 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$.

2. Побудуйте графік рівняння $|y|=[|x|-1]$, де $[a]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує a.

3. Хлопчик і дівчинка проводять діагоналі в правильному 2010-кутнику так, щоб вони не перетиналися. Той, хто проведе таку діагональ останнім, виграє. Як повинна грати дівчинка, що починає гру, щоб виграти?

4. BB_1 та CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC. B_2 та C_2 середини сторін AC та AB відповідно, $\angle A=30^\circ$. Доведіть, що відрізки B_1C_2 та C_1B_2 перпендикулярні.

5. Знайти всі прості числа x, для яких число $10x^2-47x+1$ є квадратом цілого числа.

Умови завдань другого (районного, міського) туру
Всеукраїнської олімпіади юних математиків
2010-2011 навчального року

11 клас

1. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{-2x-x^2}+\sqrt{8-2x-x^2}=4$.

2. Розв’язати рівняння $\sqrt{2x^2+3x-14}+\left|\sin(\pi x)-1\right|=0$.

3. Знайти всі натуральні значення n, для яких існують натуральні розв’язки $(x;\, y)$ системи рівнянь

$$\begin{cases} x+y=n^2, \\ 10x+y=n^3. \end{cases}$$

4. Знайдіть максимальне значення виразу a^2+b^2, якщо відомо, що $a^2+b^2+ab=a+b$.

5. Основою прямої чотирикутної призми є ромб з гострим кутом α. Під яким кутом до площини основи треба провести площину, щоб в перерізі був квадрат з вершинами на бічних ребрах призми?

Відповіді та вказівки до розв’язання завдань другого (районного) туру Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2010-2011 навчального року

6 клас

1. Відповідь: Білокуров – рудий, Чорний – блондин, Рудий - брюнет.

2. Відповідь: ні.

Додавати одиницю означає змінювати парність числа.

3. Відповідь: Василь.

З двох хлопчиків правду каже Василь, оскільки за 8 вдалих пострілів Петрик одержав 40 додаткових куль, та ще 5 він купив, отже, зробив 45 пострілів, а не 50, як стверджував.

4. Відповідь: 8 і 27 коп.

Нехай у лівій кишені Олега було x коп., тоді у правій кишені $35 - x$. Після того як з правої кишені хлопчик переклав в ліву стільки копійок, скільки було в лівій, то в правій кишені стало $35 - x - x$, а в лівій $x + x$, тоді складемо рівняння:

$$x + x + 3 = 35 - x - x;$$
$$2x + 3 = 35 - 2x;$$
$$4x = 32;$$
$$x = 8.$$

В лівій кишені Олега було 8 коп., а в правій 27 коп.

5. Відповідь: 24

Позначимо задумане число через х.

Тоді $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 18$;

$$\frac{2x}{4} + \frac{x}{4} = 18;$$
$$\frac{3x}{4} = 18;$$
$$3x = 72;$$
$$x = 24.$$

Отже, задумане число дорівнює 24.

7 клас

1. $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n=3^n3^2-2^n2^2+3^n-2^n=3^n(3^2+1)-2^n(2^2+1)=3^n10-2^n5=3^n10-2^{(n-1)+1}5=$

$=3^n10-2^{n-1}10=10(3^n-2^{n-1})$.

Оскільки один з множників ділиться на 10, то і весь добуток ділиться на 10.
Отже, при будь-якому натуральному n значення виразу $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ ділиться націло на 10.

2. До числа 21 треба дописати таку цифру справа, щоб трицифрове число ділилося на 7. Це буде число 217.

$$217:7=31$$

До числа 31 треба дописати таку цифру справа, щоб трицифрове число ділилося на 13. Це буде число 312.

$$312:13=24.$$

Отже, Олег задумав число 24.
Відповідь: 24.

3. $|x| = \frac{x}{2}+2010$.

1) Якщо $x\geq 0$, то $|x| = x$.

$x = \frac{x}{2}+2010$;
$x-\frac{x}{2} = 2010 \;|2$;
$2x-x = 4020$;
$x = 4020$.

2) Якщо $x\leq 0$, то $|x| = -x$.

$-x = \frac{x}{2}+2010$;
$-x-\frac{x}{2} = 2010 \;|2$;
$-2x-x = 4020$;
$-3x = 4020$;
$x = -1340$.

Відповідь: $x_1 = 4020$; $x_2 = -1340$.

4. На малюнку зображено 32 трикутники.

5. Ділимо всі монети на 3 купи, дві купи по 81 монеті і одна – 80 монет. Проведемо зважування двох куп по 81 монеті. Отримаємо два випадки:

1) Якщо одна чаша переважила, значить в більш легкій чаші фальшива монета.
2) Якщо терези в рівновазі, то фальшива монета серед 80 монет.

   Розглянемо перший випадок:

   1 крок. 81 монету ділимо на три купи по 27 монет. Фальшива монета серед 27 монет на чаші, якщо вона легша, або на купі, яка залишилася.

   2 крок. 27 монет ділимо на три купи по 9 монет. Фальшива монета серед 9 монет на чаші, якщо вона легша, або на купі, яка залишилася.

   3 крок. 9 монет ділимо на три купи по 3 монети. Фальшива монета серед 3 монет на чаші, якщо вона легша, або на купі, яка залишилася.

   4 крок. 3 монети ділимо на три купи по 1 монеті. Фальшива монета на чаші, якщо вона легша, або та що залишилася.

   Розглянемо другий випадок:

   До 80 монет добавимо одну справжню монету із терезів. Тоді матимемо 81 монету. Здійснюємо зважування аналогічні 1-4 крокам першого випадку.

   Таким чином, фальшиву монету можна визначити 5 зважуваннями.

8 клас

1. Якщо n не кратне 3, то його можна записати, як $n = 3k + 1$ або $n = 3k + 2$, де $k \in Z$.

Тоді $n^2 + 8 = (3k+1)^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 1 + 8 = 9k^2 + 6k + 9 = 3(3k^2 + 2k + 3)$ або $n^2 + 8 = (3k+2)^2 + 8 = 9k^2 + 12k + 4 + 8 = 9k^2 + 12k + 12 = 3(3k^2 + 4k + 4)$.

В обох випадках вирази містять множник 3, отже $n^2 + 8$ кратне 3, що й треба було довести.

2. Позначимо через *x км* відстань, яку Тарас іде пішки. Цю ж відстань Олег їде на велосипеді. Тепер їм залишилося подолати відстань (20-*x*) *км*, яку вже Тарас може їхати, а Олег мусить йти пішки. На дорогу Тарас затратить

$\frac{x}{4}\,\tilde{a}\hat{\imath}\ddot{a}$, йдучи пішки, і $\frac{20-x}{15}\,\tilde{a}\hat{\imath}\ddot{a}$, їдучи на велосипеді. Олег пішки буде йти

$\frac{20-x}{5}\,\tilde{a}\hat{\imath}\ddot{a}$, а їхати $\frac{x}{20}\,\tilde{a}\hat{\imath}\ddot{a}$. Оскільки брати одночасно вирушили в дорогу і повинні одночасно прибути до бабусі, то має місце рівняння:

$$\frac{x}{4} + \frac{20-x}{15} = \frac{20-x}{5} + \frac{x}{20};$$

$$\frac{x}{4} + \frac{20-x}{15} - \frac{20-x}{5} - \frac{x}{20} = 0;$$

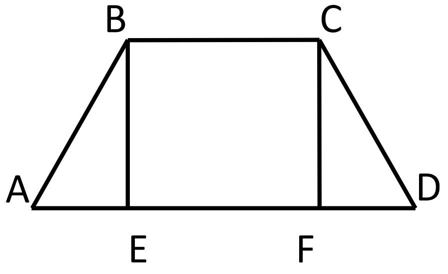
$$\frac{15\tilde{o} + 80 - 4\tilde{o} - 240 + 12\tilde{o} - 3\tilde{o}}{60} = 0;$$

$$20x = 160; \quad x = 8.$$

$$\frac{x}{4} + \frac{20-x}{15} = \frac{8}{4} + \frac{20-8}{15} = 2 + \frac{12}{15} = 2\frac{4}{5}\ \textit{(год)} = 2\textit{год}\ 48\ \textit{хв.}$$

Відповідь: На дорогу кожен з братів затратив 2 *год* 48 *хв*.

3. *Перший спосіб*



Нехай *ABCD* – дана трапеція, *AB*=*CD* – бічні сторони. За умовою *AD*=2*BC*, *BC*=*AB*=*CD*.
Позначимо *AB*=*CD*=*BC*=*x*, тоді *AD*=2*x*.
Проведемо висоти: *BE* і *CF*. Оскільки *BCEF* - прямокутник, то *EF*=*BC*=*x*.
Утворені прямокутні трикутники *AEB* і *DFC* рівні за гіпотенузою і катетом: *AB*=*CD, BE*=*CF* (як висоти трапеції). Тому

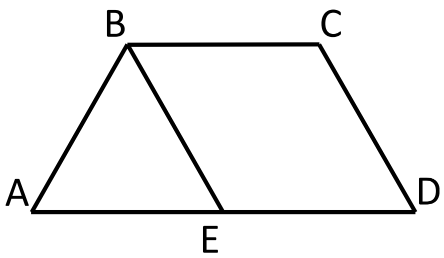
$$\grave{A}\mathring{A} = FD = \frac{AD-EF}{2} = \frac{2x-x}{2} = \frac{x}{2}.$$

В *ΔAEB*: $\grave{A}\mathring{A} = \frac{AB}{2}$, звідки кут $\angle \grave{A}\hat{A}\mathring{A} = 30^0$, а $\angle \hat{A}\grave{A}\mathring{A} = 90^0$ - 30^0 =60^0.

Отже, в даній трапеції: $\angle \grave{A} = 60^0$, $\angle D = \angle \grave{A} = 60^0$,
$\angle \tilde{N} = \angle \hat{A} = 180^0$-$60^0$=$120^0$.

Відповідь: 60^0, 60^0, 120^0, 120^0.

Другий спосіб



Нехай *ABCD* – дана трапеція, ($\grave{A}D \| \hat{A}\tilde{N}$), *AB*=*CD* – бічні сторони. За умовою *AD*=2*BC*, *BC*=*AB*=*CD*.
Позначимо *AB*=*CD*=*BC*=*x*, тоді *AD*=2*x*.
Проведемо $\hat{A}\mathring{A} \| \tilde{N}D$. *BCDE* - паралелограм, тому *ED*=*BC*=*x*, *BE*=*CD*=*x,* *AE*=*AD*-*ED*=2*x*-*x*=*x*. Трикутник *ABE* рівносторонній, бо *AB*=*BE*=*AE*=*x*.

Отже, в даній трапеції: $\angle \grave{A} = 60^0$, $\angle D = \angle \grave{A} = 60^0$,
$\angle \tilde{N} = \angle \hat{A} = 180^0$-$60^0$=$120^0$.

Відповідь: 60^0, 60^0, 120^0, 120^0.

4. $\frac{(a+b)}{a+(a-b)} = \frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}$;

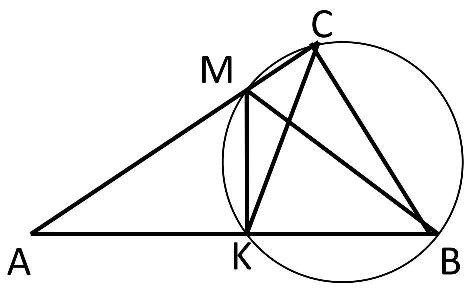
Перетворимо обидві частини тотожності:

$$\frac{(a+b)}{a+(a-b)}=\frac{a+b}{2a-b}\ ;$$

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+(a-b))(a^2-a(a-b)+(a-b)^2)}=$$
$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(2a-b)(a^2-a^2+ab+a^2-2ab+b^2)}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(2a-b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{a+b}{2a-b}$$

Ліва і права частина тотожності дорівнюють одному і тому самому виразу. Тотожність доведено.

5.



$\Delta AB\tilde{N}$ - прямокутний ($\angle\tilde{N}=90^0$), $MK\perp AB$.
В чотирикутнику *MKBC* $\angle M\tilde{N}B=90°$ і $\angle M\hat{E}B=90°$. Оскільки сума цих двох протилежних кутів 180^0, то навколо такого чотирикутника можна описати коло. $\angle M\hat{E}\tilde{N}$ і $\angle M\hat{A}\tilde{N}$ будуть вписаними в це коло. Крім того, вони спираються на ту саму дугу *MC*, звідки $\angle M\hat{E}\tilde{N}=\angle M\hat{A}\tilde{N}$, що й треба було довести.

9 клас

1. Відповідь: 95.

Позначимо найменше з цих чисел через x, тоді сума $x+x+1+x+2+x+3+x+4+x+5+x+6+x+7+x+8+x+9=10x+45<100$.

Звідки $x<5{,}5$. Оскільки це сума цілих чисел, то $x=5$, а тому шукане число $5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=95$.

2. Відповідь: 42, 24, 18.

$x^2-kx+80=0.$

Нехай x_1 та x_2 – цілі додатні парні корені, тоді

За теоремою Вієта маємо:

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=80, \\ x_1+x_2=k. \end{cases}$$

$D=b^2-4ac=k^2-320>0.$

$x_1\cdot x_2=80=2\cdot 40=4\cdot 20=8\cdot 10.$

Звідки $k_1=2+40=42$, $k_2=4+20=24$, $k_3=8+10=18$.

42, 24, 18.

3. Відповідь: $(1;1)$, $(1;-3)$, $(-3;1)$.

$$\begin{cases} (2+x)(y+2)\cdot xy=9, \\ x+y-xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+x)(y+2)\cdot xy=9, \\ y(1-x)=1-x \end{cases}$$

З другого рівняння системи маємо $y=1$ або $x=1$. Тобто маємо сукупність

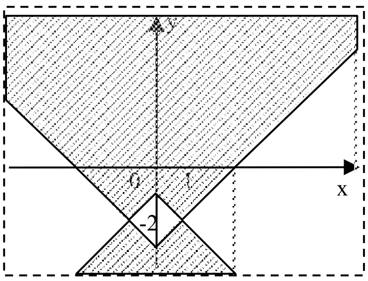
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1, \\ (2+x)\cdot 3x=9, \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ (y+2)\cdot 3y=9 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1, \\ 3x^2+6x-9=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ 3y^2+6y-9=0, \end{cases} \end{array}\right.$$

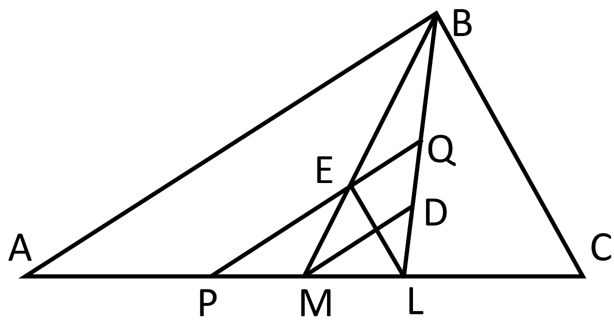
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=1,\\ x^2+6x-9=0,\end{cases}\\ \begin{cases} x=1,\\ 3y^2+6y-9,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=1,\\ x_1=-3, x_2=1,\end{cases}\\ \begin{cases} x=1,\\ y_1=-3, y_2=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

4. Відповідь: див. малюнок.



5. Вказівка.



Проведемо через точку E пряму $PQ \parallel AB$, тоді $\angle EQD = \angle ABL = \angle CBL = \angle ELD$, а отже, трикутник EQL рівнобедрений, тому $QD = LD$. За теоремою Фалеса $\frac{MP}{MA} = \frac{ME}{MB} = \frac{ML}{MC}$, але $MA = MC$, звідки $MP = ML$.

Отже, MD – середня лінія трикутника PQL, а тому $MD \parallel PQ \parallel AB$.

10 клас

1. Відповідь: $\tilde{o}=1$.

Введемо нову змінну: $x^3+x^2-1=y$,

$$\sqrt{y}+\sqrt{y+3}=3$$

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння

$$y+2\sqrt{y(y+3)}+y+3=9;$$
$$2\sqrt{y^2+3y}=9-3-2y;$$
$$2\sqrt{y^2+3y}=6-2y;$$
$$\sqrt{y^2+3y}=3-y$$

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння

$$y^2+3y=9-6y+y^2;$$
$$9y=9;$$
$$y=1$$
$$x^3+x^2-1=1$$
$$x^3+x^2-2=0$$

Серед дільників числа -2 ($\pm 1;\pm 2$) знаходимо перший корінь $x=1$.

Поділивши многочлен x^3+x^2-2 на (x-1) маємо розклад на множники лівої частини рівняння

$(\tilde{o}-1)(x^2+2x+2)=0$;

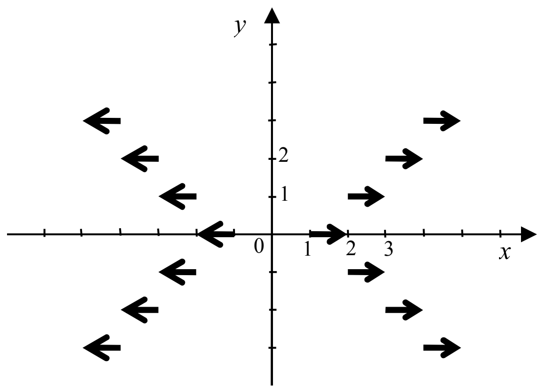
$\tilde{o}-1=0$ $\qquad x^2+2x+2=0$

$\tilde{o}=1$ $\qquad D<0$

коренів немає

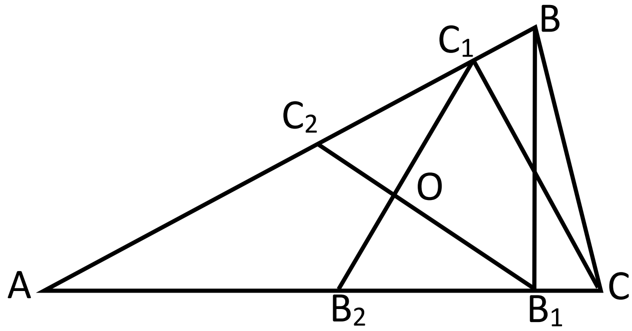
Відповідь: $\tilde{o}=1$.

2. Відповідь.



3. Відповідь. Спочатку дівчинці потрібно провести діагональ, що проходить через центр описаного кола. Потім проводити діагоналі, симетричні діагоналям, які проводить хлопчик, відносно цієї діагоналі.

4. ***Дано:***



$\Delta AB\tilde{N}$, $BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$,

C_2, B_2 – середини AB, AC відповідно;

O – точка перетину B_1C_2 і B_2C_1

Довести, що $\angle \tilde{N}_2\hat{I}\tilde{N}_1 = 90°$.

Доведення.

1) У ΔABB_1 ($\angle B_1 = 90°$), B_1C_2 – медіана. За властивістю медіани проведеної до гіпотенузи $AC_2 = B_1C_2$.

Отже, $\Delta A\tilde{N}_2B_1$ рівнобедрений з основою AB_1 і $\angle A = \angle B_1 = 30°$, тоді $\angle \tilde{N}_2 = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ $\Rightarrow$ $\angle OC_2C_1 = 60°$, як суміжний з $\angle AC_2B_1$

2) Аналогічно розглядаючи $\Delta A\tilde{N}\tilde{N}_1$ ($\angle \tilde{N}_1 = 90°$), $\tilde{N}_1\hat{A}_2$ – медіана, робимо висновок, що $\Delta A\hat{A}_2\tilde{N}_1$ рівнобедрений з основою AC_1, тоді $\angle A = \angle \tilde{N}_1 = 30°$.

Отже, у $\Delta \hat{I}\tilde{N}_2\tilde{N}_1$ ($\angle \tilde{N}_2 = 60°, \angle \tilde{N}_1 = 30°$)

$\angle O = 180° - (60° + 30°) = 90°.$

5. Відповідь: 5, 41, 53.

Нехай $10x^2 - 47x + 1 = y^2 \Rightarrow 10x^2 - 47x = y^2 - 1 \Rightarrow$ $x(10x - 47) = (y-1)(y+1)$.

Оскільки x просте число, то маємо:

1) $y - 1 = kx \Rightarrow y + 1 = kx + 2$ і рівняння набуває виду $10x - 47 = k^2x + 2k$, тому $x(10 - k^2) = 2k + 47$. Оскільки справа число додатне, то k може набувати значення 1, 2, 3. Перебором встановлюємо, що $k = 3$, а $x = 53$ просте.

2) $y + 1 = kx \Rightarrow y - 1 = kx - 2$ і рівняння набуває виду $10x - 47 = k^2x - 2k$, тому $x(10 - k^2) = 47 - 2k$. Тут маємо два

варіанти: $k \in \{1;2;3\}$ або $k > 23$. Друге неможливе, бо $k^2 - 10 > 2k - 47$. Перебором знаходимо ще два розв'язки $k = 1 \Rightarrow x = 5$ та $k = 3$, а $x = 41$.

11 клас

1. Відповідь: $x = -1$.

$\sqrt{-2x - x^2} + \sqrt{8 - 2x - x^2} = 4$;

Нехай $-2x - x^2 = t$;

$\sqrt{t} + \sqrt{8+t} = 4$;

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння

$t + 2\sqrt{8t + t^2} + 8 + t = 16$;

$2\sqrt{t^2 + 8t} = 16 - 2t - 8$;

$2\sqrt{t^2 + 8t} = 8 - 2t$;

$\sqrt{t^2 + 8t} = 4 - t$;

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння

$t^2 + 8t = 16 - 8t + t^2$;

16t=16;

t=1.

$-2x - x^2 = 1$;

$x^2 + 2x + 1 = 0$;

$(x+1)^2 = 0$;

$x = -1$.

Перевірка

$\sqrt{-2(-1) - (-1)^2} + \sqrt{8 - 2(-1) - (-1)^2} = 4$;

$\sqrt{2-1} + \sqrt{8+2-1} = 4$;

4=4.

Відповідь: $\tilde{o} = -1$.

2. Відповідь: –3,5.

$\sqrt{2x^2 + 3x - 14} + |\sin(\pi x) - 1| = 0$

Оскільки $\sqrt{2x^2 + 3x - 14} \geq 0$, $|\sin(\pi x) - 1| \geq 0$, то :

$2x^2 + 3x - 14 = 0$ і $|\sin(\pi x) - 1| \geq 0$,

$2x^2 + 3x - 14 = 0$,

$D = 9 + 8 \cdot 14 = 121$

$x_1 = -3,5$

$x_2 = 2$

$x_1 = -3{,}5$, $\left|\sin(\pi x)-1\right| = \left|\sin(-3{,}5\pi)-1\right| = \left|-\sin 3{,}5\pi - 1\right| = \left|1-1\right| = 0.$

$x_2 = 2$, $\left|\sin(\pi x)-1\right| = \left|\sin(2\pi)-1\right| = \left|0-1\right| = 1.$

Відповідь: –3,5.

3. Відповідь: 3, 6, 9.

$$\begin{cases} x+y=n^2, \\ 10x+y=n^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=n^2-x, \\ 10x+y=n^3; \end{cases}$$

З першого рівняння підставимо $y=n^2-x$ у друге.

$$\begin{cases} y=n^2-x, \\ 10x+n^2-x=n^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=n^2-x, \\ 9x=n^3-n^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=n^2-x, \\ 9x=n^2(n-1). \end{cases}$$

Ліва частина кратна 9, тому і права повинна бути кратна 9. Розглянемо випадки:

1) $n=3k$,
   $9x = 9k^2(3k\text{-}1)$
   $9x = 27k^3\text{-}9k^2$
   $x=3k^3-k^2$, $y=(3k)^2-\left(3k^3-k^2\right)=10k^2-3k^3 \ge 1$ звідки $k=1,2,3$, а $n=3,6,9$.
2) Якщо n не кратне 3, то $n-1=9m \Rightarrow x=m(9m+1)^2$ звідки $y=(9m+1)^2(1-m)$, і ні при якому m змінна y не може бути натуральним числом.

4. Відповідь: 1.

Позначимо $a^2+b^2=t$, $x=a+b$, тоді $ab=\frac{1}{2}\left(x^2-t\right) \Rightarrow t+\frac{1}{2}\left(x^2-t\right)=x \Rightarrow x^2-2x+t=0$. Для існування розв'язків $D=4-4t \ge 0$. Звідси $t \le 1$, тобто максимальне можливе значення $t=1$. Воно досягається при $a=0$, $b=1$.

5. Відповідь: $\arccos\left(tg\frac{\alpha}{2}\right)$.