ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ ДІРІХЛЕ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дуже часто буває так, що при розв'язуванні складних математичних задач використовують уже відомі методи, прийоми, принципи, теорії тощо. Завдяки цьому, деякі класи задач стають алгоритмічними, і їхні розв'язки - доступними широкому загалу. Одним із таких принципів є широковідомий принцип Діріхле. За традицією в літературі принцип Діріхле пояснюється на прикладі "зайців і кліток": якщо п'ятьох зайців розсадити в чотири клітки, то принаймні в одній із них опиниться більше одного зайця.

Принцип Діріхле, не зважаючи на його надзвичайну очевидність і простоту, часто використовується при розв'язувані задач і доведенні теорем у різних галузях математики. Більш загальне формулювання принципу Діріхле звучить так: якщо пк+1 предмет розкладено в п ящиків, то принаймні в одному з ящиків знаходиться не менше ніж к+1 предмет.

Продемонструємо приклади застосування принципу Діріхле до розв’язування логічних задач.

Задача 1. По вулицях міста рухаються 487 тролейбусів. В кожному з них може знаходитися не більше ніж 70 людей. Крім водія в тролейбусі завжди їде кондуктор. Довести, що обов’язково знайдеться 8 тролейбусів, в яких їде однакова кількість людей.

Розв’язання. За умовою задачі різних кількостей людей в тролейбусах може бути не більше ніж 69 варіантів (від 2 до 70 чоловік). Оскільки 69*7=483<487, то за принципом Діріхле обов’язково знайдеться 8 тролейбусів з однаковою кількістю людей.

Задача 2. Баба-Яга та Кащей зібрали деяку кількість мухоморів. Кількість цяточок на мухоморах Баби-Яги в 13 разів більше, ніж на мухоморах Кащея, але після того, як Баба-Яга віддала Кащею свій мухомор з найменшим числом цяточок, на її мухоморах стало цяточок тільки у 8 разів більше, ніж у Кащея. Доведіть, що спочатку у Баби-Яги було не більше 23 мухоморів.

Розв’язання. Нехай на мухоморах Кащея було п цяточок, а на тому, що він отримав, було к цяточок. Тоді в Баби-Яги було 13п цяточок, а залишилося 13п - к = 8(п + к). Тобто п = 9к/5. Виходить, у Баби-Яги на початку було цяточок 117к/5=23,4к < 24к, а оскільки на кожному мухоморі було не менше к цяточок, то, за принципом Діріхле, їх у неї було не більше ніж 23.

Задача 3. На збори приїхала 201 людина з п’яти країн. Серед кожних 6 з них знайдеться двоє однакового віку. Доведіть, що з деякої країни на збори приїхало не менше 5 людей однієї статі та одного віку.

Розв’язання. Оскільки за умовою задачі з кожних 6 присутніх можна вибрати двох однакового віку, то серед учасників є люди не більше, ніж п’яти різних віків. Принцип Діріхле дає змогу з’ясувати, що принаймні 41 учасник зборів має однаковий вік (40*5<201). Повторно застосувавши принцип Діріхле, робимо висновок, що з 41 учасника принаймні 9 будуть з однієї країни. Втретє застосувавши принцип Діріхле, маємо змогу переконатись, що не менше 5 з цих 9 учасників будуть однієї статі.

Задачі для самостійного розв’язування

Задача 4. 10 учнів на олімпіаді розв’язали 35 задач, причому відомо, що серед них є учні, які розв'язали рівно одну задачу, учні, які розв’язали рівно дві задачі і учні, які розв’язали рівно три задачі. Доведіть, що є учень, який розв’язав не менше п’яти задач.

Задача 5. П’ятеро працівників отримали на всіх зарплату в розмірі 1500 грн. Кожний з них хоче придбати собі телефон вартістю 320 грн. Доведіть, що комусь з них доведеться почекати з придбанням телефону до наступної зарплати.

Задача 6. У бригаді працюють 7 чоловік. Їх загальний вік - 332 роки. Довести, що серед них можна вибрати трьох працівників, сума віків яких не менше 142 років.

Задача 7. Дві коробки містять разом 65 кульок не обов’язково однакових розмірів. Кожна кулька одного з чотирьох кольорів: білого, чорного, червоного або жовтого. Якщо взяти будь-яких п’ять кульок одного кольору, то щонайменше дві з них матимуть однаковий розмір. Довести, що існує принаймні три кульки, які мають однаковий колір і однаковий розмір, і знаходяться в одній коробці.

Задача 8. Довести, що серед довільних 255 попарно різних натуральних чисел, які не перевищують 500, знайдуться вісім чисел, сума яких дорівнює 2008.

Вказівка. Розіб‘ємо всі натуральні числа від 1 до 500 на групи наступним чином: l).j^.500 ,j3},499 $0,252 ,j5$51 (в усіх групах крім першої і останньої сума чисел дорівнює 502). Груп

всього 251. Розглянемо довільні 255 натуральних чисел, що не перевищують 500. За принципом Діріхле знайдеться чотири групи в які потрапили по два числа з цих 255 (дійсно, якби в кожну групу потрапило не більше одного з розглядуваних 255 чисел, то груп мало б бути не менше 255). Очевидно, це не перша і не остання група (вони складаються, за побудовою, лише з одного числа).

Використані джерела

Олімпіади з математики Чернігівської області, 2005-2008 роки./ Укл.: Дяченко О.В., Лось В.М., Тихієнко В.П. - Чернігів: ЧПДУ, 2008. - 60 с.

Лось В.М., Тихієнко В.П. Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач. Навчальний посібник. - К.: Кондор, 2005. -312с.

Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. Посібн. - К.: Видавництво А.С.К., 2004. - 344 с.: іл.

При розв'язуванні багатьох задач люди користуються способами міркувань, які одержали назву «принцип Діріхле» («принцип висунутих ящиків»). У найпростішій і дотепній формі принцип Діріхле звучить так: »Не можна посадити 7 зайців у 3 клітки так, щоб у кожній клітці було не більше, ніж 2 зайці».

А взагалі твердження формулюється так:

У n клітках неможливо розсадити n + 1 зайців щоб кожний із них сидів у окремій клітці, тобто знайдеться клітка, де сидить не менше двох зайців.

Щоб застосувати принцип Діріхле до розв'язування задачі, ми повинні вказати, що саме будемо розуміти під «клітками» і «зайцями», а також спосіб, за яким будемо розсаджувати «зайців» у «клітки».

Як правило, під час розв'язування задач використовують не принцип Діріхле, а деяке його узагальнення:

Дано n кліток і nк*+1 зайців*, які розміщено у ці клітки. Тоді знайдеться клітка, де сидить не менше к + 1 зайців.

Проілюструємо застосування принципу Діріхле на розв'язуванні задач, серед яких є арифметичні й геометричні, жартівливі й побутові. Їх можна запропонувати на заняттях гуртка в 5-6 класах. Учням цікаво в них вибирати щоразу «зайців» і будувати для них відповідні «клітки».

Діти люблять гратися! Тому в школярів середніх класів великий інтерес викликають подібні задачі. З їх допомогою вчитель може внести в заняття гуртка елемент розваги, що важливо для учнів 5-6 класів.

В той же час такі задачі є змістовними. При їх розв'язуванні школярі звичайно мають значні труднощі. Адже необхідно, по-перше, грамотно сформулювати стратегію, а по-друге, довести, що вона справді веде до виграшу.

Тому завдання даного типу дуже корисні для розвитку розмовної математичної культури, чіткого розуміння того, що означає розв'язати задачу.

Задача 1. У класі навчається 29 учнів. Сашко Петренко зробив у диктанті 13 помилок, і ніхто інший не зробив більшої кількості помилок. Довести, що принаймні три учні зробили однакову кількість помилок.

Розв'язання. Приймемо за «клітки» всі можливі варіанти кількості помилок. їх 14, оскільки учні можуть зробити 0, 1, ..., 13 помилок. «Зайцями» вважатимемо учнів, які писали диктант і яких за умовою 29. Кожного з них «садимо» у «клітку», що відповідає кількості зроблених помилок. Зрозуміло, що знайдеться «клітка», в якій «сидять» принаймні три «зайці», а це й означає, що знайдуться три учні, які зробили однакову кількість помилок.

Задача 2. У п'ятих класах школи навчається 160 учнів. Довести, що знайдуться 4 учні, у яких день народження припаде на один і той самий тиждень.

Розв'язання. У році може бути максимум 53 тижні. їх і приймемо за «клітки», а за «зайців» — учнів. Розсаджуватимемо «зайців» у ті «клітки», що відповідають їх дням народження. Оскільки 160 : 53 = $3\frac{1}{3}$, то за принципом Діріхле знайдеться «клітка», у якій принаймні 4 «зайці». Це означає, що знайдеться тиждень, на який припаде день народження відразу у чотирьох учнів.

Задача 3. У клітинках таблиці розмірами 3х3 розмішено числа -1; 0; 1. Розглянемо вісім сум: суми всіх чисел у кожному рядку, кожному стовпці і на двох діагоналях таблиці. Чи можуть усі ці суми бути різними?

Розв'язання. Нехай «клітками» будуть усі різні значення сум трьох чисел, кожне з яких набуває значення 0, 1 або -1. Зрозуміло, що таких значень 7. Це -3; -2; - 1; 0; 1; 2; 3

«Зайцями» будуть набори із трьох чисел, що розмішені або в одному стовпці, або в одному рядку, або на одній із двох діагоналей таблиці. Таких наборів 8.

Як розсаджуватимемо «зайців»? Кожного «зайця» садитимемо в «клітку», що є значенням суми чисел «зайця». Тоді за принципом Діріхле знайдеться «клітка», де сидять не менше двох «зайців». А це й означає, що знайдуться дві розглядувані трійки чисел, для яких суми рівні.

Відповідь Ні.

Задача 4. У ящику лежать 10 пар чорних рукавичок і 10 пар червоних одного розміру. Скільки рукавичок потрібно витягнути з ящика навмання, щоб серед них були:

а) хоча б дві рукавички одного кольору;

б) хоча б одна пара рукавичок одного кольору?

Розв'язання. а) Якщо за «клітки» прийняти кольори рукавичок, то взявши три довільні рукавички, ми отримаємо, що в одній із «кліток» знаходяться два «зайці»-рукавички. А це і вимагається в задачі.

б) Якщо взяти 20 рукавичок на одну руку, то з них не можна буде вибрати пару рукавичок одного кольору, тому шукана кількість рукавичок не менша ніж 21.

Справді, якщо за «клітки» прийняти кольори рукавичок (їх два), а за «зайців» — рукавички, то за узагальненим принципом Діріхле в одній з «кліток» буде не менше 11 «зайців». Це означає, що знайдеться 11 рукавичок одного кольору. Але ми маємо лише 10 пар рукавичок одного кольору. Тому всі вони не можуть бути на одну руку. Отже, серед цих 11 рукавичок знайдеться одна пара рукавичок одного кольору.

Розглянемо, як принцип Діріхле використовується до розв'язування задач **на подільність**. Такі задачі — класичний приклад застосування принципу Діріхле.

Задача 5. Довести, що серед довільних трьох цілих чисел можна знайти два, сума яких ділиться на 2.

Розв'язання. Приймемо за «клітки» різні остачі від ділення чисел на 2. Їх усього дві: 0 і 1. «Зайцями» будемо вважати остачі від ділення на 2 трьох даних чисел. їх буде три. Розмістивши «зайців» у «клітки» (кожного «зайця» розміщаємо у «клітку», що дорівнює остачі від ділення його на 2), за принципом Діріхле отримаємо, що знайдеться «клітка» з двома «зайцями», тобто знайдуться два числа, що дають при діленні на 2 однакові остачі. їх сума і ділиться на 2.

Задача 6. Довести, що серед довільних семи чисел можна знайти три, сума яких ділиться на 3.

Розв'язання. За «клітки» приймаємо різні остачі від ділення на 3. Їх усього три: 0, 1, 2. «Зайцями» вважатимемо остачі від ділення на 3 даних семи чисел. Їх усього 7. Як і в попередній задачі, розмістивши «зайців» у «клітки» і використовуючи узагальнений принцип Діріхле, робимо висновок, що знайдуться три «зайці», що знаходяться в одній із «кліток». А це й означає, що знайдуться три числа, які дають однакові остачі від ділення на 3. Їх сума ділиться на 3.

Задача 7. Дано 12 довільних цілих чисел. Довести, що з них можна вибрати два, різниця яких ділиться на 11.

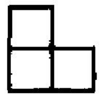
Розв'язання. Приймемо за «клітки» різні остачі від ділення чисел на 11. Їх усього 11. За «зайців» приймемо остачі від ділення даних чисел на 11. Їх усього 12. Розміщуючи «зайців» у «клітки» аналогічно до попередніх задач, за принципом Діріхле отримаємо, що знайдеться два «зайці» в одній із «кліток». А це означає, що знайдеться два числа, які дають однакові остачі від ділення на 11. Зрозуміло, що різниця цих чисел буде ділитися на 11.

Принцип Діріхле використовується і під час розв'язування задач **<u>на зафарбовування.</u>**

Задача 8. Кожну грань куба зафарбовано у білий або чорний колір. Довести, що знайдуться однаково зафарбовані грані, що мають спільне ребро.

<u>Розв'язання.</u> Розглянемо довільну вершину куба. У ній перетинаються три грані. Приймемо за «клітки» кольори, а за «зайців» — грані, що перетинаються в одній вершині. Їх усього три. Тому за принципом Діріхле знайдеться клітка, у якій міститься два «зайці». А це означає, що знайдуться дві грані, які мають спільне ребро (оскільки вони мають спільну точку) і зафарбовані однаково.

Задача 9. На шаховій дошці розмірами 8x8 клітинок розставлено 31 фігуру. Довести, що знайдеться вільна фігура, яка складається з трьох клітинок і зображена на малюнку.



<u>Розв'язання.</u> Для того щоб не було вільної фігури, складеної з трьох клітинок, у будь-якому квадраті розмірами 2x2 клітинки має розміститися не менше двох фігур. Оскільки можна покрити всю дошку 16-ма квадратиками розмірами 2x2 клітинки, що не перекриваються, то всього фігур має бути не менше 32, а у нас є 31. Отже, за сформульованим принципом знайдеться квадрат розмірами 2x2 клітинки, в якому опиниться лише одна фігура. У ній і міститься вільна фігура, що складається з трьох клітинок.

Додаткові задачі

1. В гуртку 10 школярів. Чи можна стверджувати, що серед цих гуртківців є хоча б 2, які відзначають день народження в одному й тому самому місяці?
2. В шести класах школи навчається 60 учнів. Довести, що хоча б двоє з них святкують день народження в один і той самий тиждень.
3. У школі 740 учнів. Довести, що принаймні троє з них народилися в один і той самий день.
4. У похід пішло 12 туристів. Наймолодшому з них 20 років, а найстаршому - 30.

   Чи є серед них однолітки?
5. В шаховому турнірі кожен шахіст зіграв з кожним по одній партії. Всі отримали принаймні по одній перемозі. Довести, що якісь двоє шахістів у підсумку мають однакову кількість перемог.
6. У вищій лізі першості України з футболу виступає 16 команд. У другому крузі чемпіонату кожні дві команди повинні зіграти між собою один матч.

Довести, що завжди є дві команди, які провели однакову кількість ігор чемпіонату.

7. У районі 15 шкіл. Довести, що як би між ними не розподіляли 90 комп'ютерів, обов'язково знайдуться дві школи, які отримали однакову кількість комп'ютерів (можливо — жодного).
8. (Районна олімпіада 1998-1999 рр.) В таксі їдуть 5 пасажирів. Доведіть, що серед них знайдуться два пасажири, які мають однакову кількість знайомих серед цих 5-ти пасажирів.
9. (Районна олімпіада 2000-2001 рр.) Одинадцять школярів відвідують п’ять гуртків (деякі з учнів не обов’язково відвідують всі гуртки). Доведіть, що серед них є два учні, А і В, такі, що всі гуртки, які відвідує А, відвідує й В.